

## MAI 1 – 1. a 2. cvičení

### I. Spočetné množiny:

Zopakujte si, co znamená, že množina  $M$  je spočetná.

Dokažte:

1. Necht' množiny  $A, B$  jsou spočetné, pak také množina  $A \times B$  je spočetná.  
Necht' množiny  $A_1, A_2, \dots, A_n$  jsou spočetné, pak také množina  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  je spočetná.
2. Množina všech uspořádaných  $n$ -tic racionálních čísel ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ) je spočetná.
3. Sjednocení konečně mnoha nebo spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina.
4. Množina všech konečných posloupností prvků dané spočetné množiny je spočetná.
5. Množina všech polynomů s racionálními koeficienty je spočetná.

### II. Supremum a infimum množiny v $\mathbb{R}$ :

1. Zopakujte si definici suprema, infima, maxima a minima množiny v  $\mathbb{R}$ , také větu o supremu (infimu).
2. Uveďte příklad množiny, která má supremum a nemá maximum; může mít množina maximum, ale ne supremum? Uveďte příklad množiny, která supremum nemá.
3. Najděte (v  $\mathbb{R}$ ) supremum, infimum, maximum, minimum (pokud existují) následujících množin:

$$\text{a) } A_1 = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}; \quad A_2 = \left\{ 1 - \frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N} \right\}; \quad A_3 = \left\{ \frac{n-1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}; \quad A_4 = \left\{ \frac{n+(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$A_5 = \left\{ n^{(-1)^n}; n \in \mathbb{N} \right\}; \quad A_6 = \left\{ \frac{p}{p+q}; p, q \in \mathbb{N} \right\};$$

$$\text{b) } B_1 = \left\{ n^2 - m^2; m, n \in \mathbb{N} \right\}; \quad B_2 = \left\{ n^2 - m^2; m, n \in \mathbb{N}, n > m \right\}; \quad B_3 = \left\{ n^2 - m^2; m, n \in \mathbb{N}, n \leq m \right\};$$

$$\text{c) } C_1 = \left\{ 2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N} \right\}; \quad C_2 = \left\{ 2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$\text{d) } D_1 = \left\{ \sin x; x \in [0, 2\pi] \right\}; \quad D_2 = \left\{ \sin x; x \in (0, 2\pi) \right\}; \quad D_3 = \left\{ \sin x; x \in (0, \pi) \right\}; \quad D_4 = \left\{ \sin x \cdot \cos x; x \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\text{e) } E = \left\{ q < \sqrt{3}; q \in \mathbb{Q} \right\}.$$

4. Ukažte, že pro neprázdné množiny  $A, B$  reálných čísel platí:  $(\forall a \in A \forall b \in B : a \leq b) \Rightarrow (\sup A \leq \inf B)$ .

5. Necht' podmnožiny  $A, B$  množiny reálných čísel jsou neprázdné a omezené. Co lze říci o supremu a infimu množin

$$\text{a) } A \cup B; \quad \text{b) } A \cap B; \quad \text{c) } A + B = \{a + b; a \in A \wedge b \in B\}; \quad \text{d) } -A = \{-a; a \in A\}.$$

### III. Nekonečné posloupnosti (zopakujte si definici posloupnosti reálných čísel):

1. Co znamená, že posloupnost je omezená shora, resp. omezená zdola, resp. omezená?

Zopakujte také definice: posloupnost je rostoucí, resp. neklesající, resp. klesající, resp. nerostoucí.

Vyšetřete, zda některou z těchto vlastností mají posloupnosti:

$$\text{a) } \left\{ \frac{1}{n} \right\}; \quad \text{b) } \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}; \quad \text{c) } \left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\}; \quad \text{d) } \left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}; \quad \text{e) } n \cdot (\sqrt{n^2+1} - n);$$

$$\text{e) } \left\{ q^n \right\} \quad \text{pro (i) } q \in (-1, 1), \quad \text{(ii) pro } q \in (1, \infty), \quad \text{(iii) pro } q \leq -1.$$

2\*. a) Ukaŕte, ŕe rekurentnĕ definovaná posloupnost  $\{a_n\}$ , kde  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$  je rostoucí a shora omezená.

b) Ukaŕte, ŕe rekurentnĕ definovaná posloupnost  $\{a_n\}$ , kde  $a_1 = 10$ ,  $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$  je klesající a zdola omezená.

A třeba i

IV. Tĕleso reálných čísel (a cvičení důkazů):

1. Dokaŕte následující tvrzení:

a) Je-li  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ , pak opačný prvek  $-x$  a inverzní prvek  $x^{-1}$  jsou určeny jednoznačně;

b)  $\forall x \in \mathbb{R}: 0 \cdot x = 0$ ;

c)  $\forall x, y \in \mathbb{R}: (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ ;

d)  $\forall x \in \mathbb{R}: -(-x) = x$ ,  $-x = (-1) \cdot x$ ;

e)  $\forall x, y \in \mathbb{R}: (-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$ .

2. Dokaŕte:

a)  $0 < 1$ ; b)  $0 < x \Rightarrow 0 < x^{-1}$ ; c)  $x \neq 0 \Rightarrow 0 < x \cdot x$ ; d)  $0 < x \Rightarrow -x < 0$ ;

e)  $x < y \Rightarrow -x > -y$ ; f)  $x < 0 < y \Rightarrow x \cdot y < 0$ .